



TITLE:

Stable Homeomorphismについて (Combinatorial Topology)

AUTHOR(S):

小林, 一章

CITATION:

小林, 一章. Stable Homeomorphismについて (Combinatorial Topology). 数理解析研究所講究録 1972, 152: 77-84

ISSUE DATE:

1972-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106815>

RIGHT:

Stable homeomorphism について

北大 理 小林一章

§ 1. 序

話は特にことわらない限り TOP-category での事とします。
 R^n , S^n を各々 n 次元ユークリッド空間, 球面とする。

n 次元 stable homeomorphism conjecture (SHC $_n$):
 R^n の任意の orientation preserving homeomorphism は stable である。 (R^n の代りに S^n としてもよい。)

これは $n \neq 4$ のとき肯定的に解決されています (see [3]).

homeomorphism $h: R^n \rightarrow R^n$ が次の条件を満足するとき h を weak locally convex homeomorphism という。

条件: $\exists x \in R^n, \exists \varepsilon > 0 \exists \vec{y} \in \overrightarrow{h(\partial B_\varepsilon^n(x))} = 1$ 矣。

ただし y は $\partial B_\varepsilon^n(h(x))$ の任意の点。又 $\partial B_\varepsilon^n(p)$ は p を中心半径 ε の n -ball $B_\varepsilon^n(p)$ の境界。特に $\varepsilon = 1$ のときは ε を省略します。 $\vec{p\bar{q}}$ は p から出て q を通る半直線。

次に homeomorphism $h: R^n \rightarrow R^n$ が $h = h_1 \circ \dots \circ h_k$ とかけて, 全ての h_i が weak locally convex homeomorphism

phism (各 h_i に対し $\varepsilon_i > 0$ が対応している) であるとき, h を SWC-homeomorphism という。明らかに stable homeomorphism は SWC-homeomorphism である。

定理1。 SHC_{n-1} が正しければ \mathbb{R}^n の任意の orientation preserving SWC-homeomorphism は stable である。

$n \neq 4$ のとき [3] によって正しいから 次が得られる。

系。 \mathbb{R}^n の任意の orientation preserving SWC-homeomorphism は stable 。

定理2。 M^n を orientable connected closed manifold とする。 SHC_n が正しければ, M^n の任意の orientation preserving homeomorphism は stable である。

系。 M^n は上と同じとする。 $n \neq 4$ のとき M^n の任意の orientation preserving homeomorphism は stable である。

M^n を n 次元 manifold, X を M^n の m 次元 proper submanifold とする。このとき X の M における closed tubular neighborhood とは, closed $(n-m)$ -cell bundle $p: E$

$\rightarrow X$ のことである。ただし p は retraction で E は M^n の locally flat submanifold である。 $E|_{\partial X} \subset \partial M$, $E|_{\text{Int} X} \subset \text{Int} M$ のとき E meets boundary regularly といふ。

定理3。 $M^n (n \neq 4)$: 境界のある n 次元 manifold.

$f: I \rightarrow M^n$; locally flat proper embedding
($I = [0, 1]$)

$\Rightarrow f(I)$ は M^n で closed trivial tubular neighborhood をもつ。

【おわび】 シンポジウムでの tubular neighborhood の uniqueness に関する定理は証明にミスがありましたので、省略させていただきます。

§2.

【定理1の証明】 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を orientation preserving weak locally convex homeomorphism としたとき、 h がある空でない open set $U \subset \mathbb{R}^n$ において $h|_U = \text{id}$. を示せば十分である。 h の定義より $\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists \varepsilon > 0 \exists h(\partial B_\varepsilon^n(x)) \cap \overrightarrow{h(x)y} = \text{one point for } \forall y \in \partial B_\varepsilon^n(h(x)).$

従って $B_\varepsilon^n(h(x)) \cup h(B_\varepsilon^n(x)) \subset \text{Int } B_\eta^n(h(x))$ ならば $B_\eta^n(h(x))$ をとると \exists ambient isotopy $\{H_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ of $\mathbb{R}^n \ni$

$$(1) H_0 = \text{id}, \quad H_1 h(B_\varepsilon^n(x)) = B_\varepsilon^n(h(x))$$

$$(2) H_t|_{\mathbb{R}^n - \text{Int } B_\eta^n(h(x))} = \text{id}.$$

次に $B_\varepsilon^n(x) \cup B_\varepsilon^n(h(x)) \subset \text{Int } B_\xi^n(x)$ ならば $B_\xi^n(x)$ をとると

\exists ambient isotopy $\{G_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ of $\mathbb{R}^n \ni$

$$(1) G_0 = \text{id}, \quad G_1(B_\varepsilon^n(h(x))) = B_\varepsilon^n(x)$$

$$(2) G_t|_{\mathbb{R}^n - \text{Int } B_\xi^n(x)} = \text{id}.$$

従って $G_1 H_1 h$ は \mathbb{R}^n の orientation preserving homeomorphism で $G_1 H_1 h(B_\varepsilon^n(x)) = B_\varepsilon^n(x)$ である。又 $G_1 H_1 h|_{\partial B_\varepsilon^n(x)}$ は S^{n-1} から自分自身への orientation preserving homeomorphism であるから、 SHC_{n-1} が正しいという仮定によって $G_1 H_1 h|_{\partial B_\varepsilon^n(x)}$ は stable である。故に [3] によって isotopic to the id. 即ち \exists ambient isotopy $\{\tilde{K}_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ of $\partial B_\varepsilon^n(x) \ni$

$$\tilde{K}_0 = \text{id}, \quad \tilde{K}_1 = (G_1 H_1 h|_{\partial B_\varepsilon^n(x)})^{-1}.$$

更に $\{\tilde{K}_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ の \mathbb{R}^n への extension で次の性質をもつ ambient isotopy $\{K_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ が存在する,

$$(1) K_0 = \text{id}, \quad K_1|_{B_\varepsilon^n(x)} = (G_1 H_1 h|_{B_\varepsilon^n(x)})^{-1}$$

$$(2) K_t|_{\mathbb{R}^n - \text{Int } B_\xi^n(x)} = \text{id}$$

従って $K_1 G_1 H_1 h$ は \mathbb{R}^n の orientation preserving homeomorphism で次の性質をもつ

$$(1) K, G, H, h|_{R^n - \text{Int}(B_\eta^n(h(x)) \cup B_\xi^n(x))} = h|_{R^n - \text{Int}(B_\eta^n(h(x)) \cup B_\xi^n(x))}$$

$$(2) K, G, H, h|_{B_\xi^n(x)} = \text{id}.$$

故に(2)より K, G, H, h は stable homeomorphism であり, また(1)によって h は stable homeomorphism である. \square

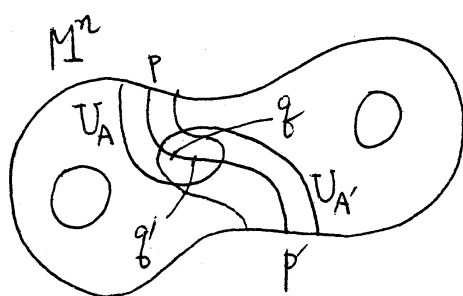
[定理2の証明] $h: M^n \rightarrow M^n$ を orientation preserving homeomorphism とする. [1]によって SHC_n が正しいとすると n 次元 annulus conjecture が正しい. そこで任意の orientable n -manifold は stable manifold である [1]. 仮定より M^n は connected だから M^n の1点で h が stable であることを示せば十分である. しかしこれは SHC_n が正しいという条件のもとでは明らかである. 従って h は stable である.

[定理3の証明] $f(I)$ は M^n の中の locally flat proper simple arc だから [2]によって $f(I)$ は次の性質をもつ2つの open arcs A と A' の union としてかゝれる,

(1) A, A' は M^n の中で直傍 $U_A, U_{A'}$ をもつ

(2) $U_A \cap f(I) = A$ で (U_A, A) は (H_+^n, H_+^1) に homeomorphic である. ここで $H_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$

(3) $U_{A'} \cap f(I) = A'$ で $(U_{A'}, A')$ は (H_+^n, H_+^1) に homeomorphic である.



点 p, p', q, q' を図のようにとる。

a : 端点 p, q をもつ A の subarc

a' : 端点 p', q' をもつ A' の subarc

b : 端点 p', q をもつ A' の subarc

とする。

上の(2)から \exists locally flat embedding $F: D^{n-1} \times [0, 7] \rightarrow U_A$

$$\supset (i) F(D^{n-1} \times [0, 7]) \cap f(I) = F(\partial \times [0, 7]) = a$$

$$(ii) F(\partial, 0) = p, F(\partial, 6) = q', F(\partial, 7) = q$$

$$(iii) F(D^{n-1} \times [6, 7]) \subset U_A \cap U_{A'}$$

$$(iv) F(D^{n-1} \times [0, 7]) \cup A \text{ もまた locally flat}$$

ここで ∂ は D^{n-1} の中心とする。

$g: U_{A'} \rightarrow H_+^n$ を homeomorphism とし $g(F(D^{n-1} \times [6, 7]))$

を内部に含むような rectangular

cell $C^n \subset \text{Int } H_+^n$ をとると, $n \neq 4$ だか

ら [3] によって annulus conjecture

が成立しており, 従って

$$C^n - gF(\text{Int}(D^{n-1} \times [6, 7])) \cong S^{n-1} \times [0, 1].$$

故に \exists ambient isotopy $\{G_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ of $H_+^n \supset$

$$(1) G_0 = \text{id.} \quad G_t g F(D^{n-1} \times [6, 7]) = C^n$$

$$(2) G_t|_{H_+^n - U(C^n)} = \text{id.} \quad \text{ここで } U(C^n) \text{ は } C^n \text{ の collar}$$

を含んでいるような H_+^n における C^n の近傍とする。

今 $C^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in H_+^n \mid s_i \leq x_i \leq t_i, s_i, t_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, n\}$
 としたとき $C_+^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in C^n \mid x_1 = t_1\}$
 $C_-^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in C^n \mid x_1 = s_1\}$ とする。

$G_1 g F(0, \gamma) = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ としたとき $G_1 g F(0, \gamma) \in C_-^{n-1}$,
 $G_1 g(p) = (0, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$ と仮定してよい。明らかに $\Gamma_1 = s_1$,
 $s_i < \Gamma_i < t_i$, $i=2, 3, \dots, n$ である。

次に (U_A, A) は (H_+^n, H_+^1) に homeomorphic 即ち unknot であるから \exists homeomorphism $K: H_+^n \rightarrow H_+^n \ni$

(1) $K G_1 g(b) = \text{segment from } (0, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n) \text{ to } (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$

(2) $K|_{\partial H_+^n \cup C^n} = \text{id}.$

$$\therefore \partial H_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in H_+^n \mid x_1 = 0\}$$

(3) K は compact support を持つ。

従って $\|x\|$ が十分大ならば $x \in H_+^n$ に対し $K G_1(x) = x$ である。

$$P^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in H_+^n \mid 0 \leq x_1 \leq \Gamma_1, s_i \leq x_i \leq t_i, i=2, \dots, n\}$$

$$P_+^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in P^n \mid x_1 = \Gamma_1\} \text{ とすると}$$

$$P_+^{n-1} = C_-^{n-1} \text{ である。}$$

よって $E = F(D^{n-1} \times [0, \gamma]) \cup g^{-1} G_1^{-1} K^{-1}(P^n)$ とすると, E は $f(I)$ の trivial tubular neighborhood である。

References

[1] Brown, M and Gluck, H: Stable structures on

manifolds I. II. III., Ann. of Math. 79 (1964), 1-58

[2] H. Gluck : Unknotting S^1 in S^4 , Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 91-94

[3] R. C. Kirby : Lectures on triangulations of manifolds (mimeographed note, UCLA, 1969)